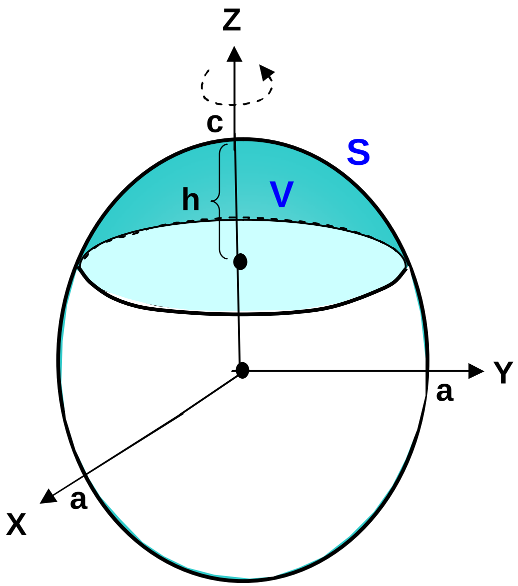
2013. 1. 9. **計算公式の導き方**
2013. 2. 6. **実数体系a>cでの計算式追加**
keisan

一部が欠けた回転楕円体の表面積の求め方



楕円体の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $\quad a=b$

XZ面の楕円の方程式 (y=0) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

一部が欠けた楕円体の表面積

$$S=\int_{c-h}^{c}2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\,dz$$
$$=2\pi a\int_{c-h}^{c}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{(xx')^2}{a^2}}\,dz$$
$$=2\pi a\int_{c-h}^{c}\sqrt{1-\frac{e^2}{c^2}z^2}\,dz$$
$$=2\pi a\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\frac{c}{e}\cos\theta d\theta$$
$$=\frac{\pi ac}{e}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(1+\cos 2\theta)d\theta$$
$$=\frac{\pi ac}{e}\left|\theta+\sin\theta\cos\theta\right|_{\theta_1}^{\theta_2}$$
$$=\frac{\pi ac}{e}\left\{\sin^{-1}e+e\sqrt{1-e^2}-\sin^{-1}e_1-e_1\sqrt{1-e_1^{\,2}}\right\}$$
$$=\pi ac\left\{\frac{\sin^{-1}e-\sin^{-1}e_1}{e}+\frac{a}{c}-\left(1-\frac{h}{c}\right)\sqrt{1-e_1^{\,2}}\right\}$$

実数体系 c>aの条件

$$x=a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$$

$$xx'=-\frac{a^2}{c^2}z$$

$$\sin\theta=\frac{e}{c}z \qquad e=\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}$$

$$\theta_2=\sin^{-1}e$$

$$\theta_1=\sin^{-1}e_1 \qquad e_1=e\left(1-\frac{h}{c}\right)$$

複素数体系では、a>cでも上記式で求まるが、
実数体系での計算式は下記になります。

$$S=\pi ac\left\{\frac{\sinh^{-1}e-\sinh^{-1}e_1}{e}+\frac{a}{c}-\left(1-\frac{h}{c}\right)\sqrt{1+e_1^{\,2}}\right\}$$

実数体系 a>cの条件

$$e=\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1} \qquad e_1=e\left(1-\frac{h}{c}\right)$$

a=c **すなわち一部が欠けた球の表面積の場合は、**

$$S=2\pi ah$$

一部が欠けた楕円体の体積

$$V=\int_{c-h}^{c}\pi x^2dz$$
$$=\pi\frac{a^2}{c^2}\int_{c-h}^{c}\left(c^2-z^2\right)dz$$
$$=\pi\frac{a^2}{c^2}\left|c^2z-\frac{z^3}{3}\right|_{c-h}^{c}$$
$$=\frac{\pi a^2h^2}{3c^2}(3c-h)$$